

Loogikatehe "SUMMA MOODULIGA 2" ("välistav VÕI") \oplus

$$x_1 \oplus x_2$$

Loogikatehe (ehk 2-he muutuja funktsioon) "summa mooduliga 2" on ekvivalentsi inversioon :

$$x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1 \leftrightarrow x_2} \quad \text{samuti:} \quad \overline{x_1 \oplus x_2} = x_1 \leftrightarrow x_2$$

2-muutuja kõikide loogikafunktsioonide $f(x_1, x_2)$ hulgas :

$x_1 x_2$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1
	0	$x_1 x_2$	$\overline{x_1 \rightarrow x_2}$	x_1	$\overline{x_2 \rightarrow x_1}$	x_2	$\overline{x_1 \leftrightarrow x_2}$ $x_1 \oplus x_2$	$x_1 \vee x_2$

$x_1 x_2$	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1
	$\overline{x_1 \vee x_2}$	$x_1 \leftrightarrow x_2$	\bar{x}_2	$x_2 \rightarrow x_1$	\bar{x}_1	$x_1 \rightarrow x_2$	$\overline{x_1 x_2}$	1

...leidus tehe "summa mooduliga 2" funktsioonina f_6 :

$x_1 x_2$	f_6	f_9
0 0	0	1
0 1	1	0
1 0	1	0
1 1	0	1
	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \leftrightarrow x_2$

meenutame :

varem vaatlesime viit erinevat 2-muutujafunktsiooni tõeväärtustabelit :

$x_1 x_2$	f_e	f_t	f_k	f_n	f_v
0 0	0	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1
1 0	1	0	1	1	1
1 1	0	1	1	0	1
	vastus: $\overline{x_1 \rightarrow x_2}$ $x_1 \bar{x}_2$	vastus: $x_1 \leftrightarrow x_2$ $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2$ $\overline{\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2}$	vastus: $x_2 \rightarrow x_1$ $\bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2$ $\bar{x}_1 x_2$	vastus: \bar{x}_2 $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_2$	vastus: 1

pane tähele :

need vaadeldud 5 funktsiooni (meie tähistustega f_e f_t f_k f_n f_v)

leiduvad samuti **kuueteistkümne** 2-muutuja loogikafunktsiooni $f(x_1, x_2)$ hulgas :

x_1x_2	f_0	f_1	f_e	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
00	0	0	0	0	0	0	0	0
01	0	0	0	0	1	1	1	1
10	0	0	1	1	0	0	1	1
11	0	1	0	1	0	1	0	1
	0	x_1x_2	$\overline{x_1 \rightarrow x_2}$	x_1	$\overline{x_2 \rightarrow x_1}$	x_2	$\overline{x_1 \leftrightarrow x_2}$ $x_1 \oplus x_2$	$x_1 \vee x_2$

x_1x_2	f_8	f_t	f_n	f_k	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_v
00	1	1	1	1	1	1	1	1
01	0	0	0	0	1	1	1	1
10	0	0	1	1	0	0	1	1
11	0	1	0	1	0	1	0	1
	$\overline{x_1 \vee x_2}$	$x_1 \leftrightarrow x_2$	\bar{x}_2	$x_2 \rightarrow x_1$	\bar{x}_1	$x_1 \rightarrow x_2$	$\overline{x_1x_2}$	1



? millest tuleb nimetus "SUMMA MOODULIGA 2" ?

Nimi sobib sellepärast, et (funktsiooni f_6) väärtus osutub võrdseks operandide aritmeetilise summaga, millele on rakendatud moodulit 2 :

$$(0 + 0) \text{ mod } 2 = 0 \text{ mod } 2 = 0$$

$$(0 + 1) \text{ mod } 2 = 1 \text{ mod } 2 = 1$$

$$(1 + 0) \text{ mod } 2 = 1 \text{ mod } 2 = 1$$

$$(1 + 1) \text{ mod } 2 = 2 \text{ mod } 2 = 0$$

Loogikatehet "summa mooduliga 2" nimetatakse ka "välistav VÕI" ja tähistatakse **XOR** (eXclusive OR)



? millest tuleb nimetus "VÄLISTAV VÕI" ?

x_1x_2	f_6	f_7
00	0	0
01	1	1
10	1	1
11	0	1
	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \vee x_2$

näeme tõeväärtustabelitest: tehted VÕI ja "välistav VÕI" (OR ja XOR) on sarnased.

Erinevus on ainult argumentiväärtuste kombinatsiooni

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad \text{korral.}$$

Tehe **XOR** väärtustub 1-ks siis, kui kas esimene või teine operand (**kuid mitte mõlemad korraga !**) on 1.

Operandiväärtused 1 nagu "välistaksid" **XOR**-korral vastastikku teineteist ehk "välistav VÕI" reageerib (erinevalt tehtest VÕI) olukorrale

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad \text{väärtustumisega } 0\text{-ks}$$

Märgime, et praktilises keelekasutuses kasutatakse sidesõna "VÕI" justnimelt tähenduses "välistav VÕI" ehk igapäevane sidesõna "VÕI" siiski erineb veidi temale omistatud/defineeritud tähendusest *lausearvutuses*.

Kõnekeeles ei koostata/kasutata VÕI-lauset nii, et mõlemad (VÕI-ga seotud) väited/laused on samaaegselt tõesed.

näited kõnekeeles VÕI-lausetest :

..... kirjutan pliiatsiga **või** pastakaga

..... värvi pintsliga **või** värvirulliga

..... tulen jala **või** jalgrattaga

..... sõidan Tartusse bussiga **või** rongiga

.... kodutöö lehed tuleb panna kiletaskusse **või** kinnitada lehed klambriga

Avaldise $x_1 \oplus x_2$ DNK-kujulise *asendusese* saame tema 1-de piirkonnast, mis on $\{01, 10\}$:

$x_1 x_2$	f_6
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	0
	$x_1 \oplus x_2$

$$x_1 \oplus x_2 = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$$

Avaldis $\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$ väärtustub tema muutujate kõigi nelja väärtuskombinatsiooni korral kokkulangevalt avaldisega $x_1 \oplus x_2$:

$x_1 x_2$	$x_1 \oplus x_2$	$\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$
0 0	$0 \oplus 0 = 0$	$\bar{0} \cdot \bar{0} \vee 0 \cdot \bar{0} = 0$
0 1	$0 \oplus 1 = 1$	$\bar{0} \cdot 1 \vee 0 \cdot \bar{1} = 1$
1 0	$1 \oplus 0 = 1$	$\bar{1} \cdot 0 \vee 1 \cdot \bar{0} = 1$
1 1	$1 \oplus 1 = 0$	$\bar{1} \cdot 1 \vee 1 \cdot \bar{1} = 0$

eelnevat asenduseseost:

$$x_1 \oplus x_2 = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$$

võib kasutada tehte \oplus asendamiseks loogikaavaldiste teisendamisel.

Digitaaltehnikas tähistatakse XOR-tehte **inversiooni** ka lühendiga **XNOR**. XNOR on seega sama mis loogikatehe **ekvivalents**.

Tehte \oplus omadused

tehte \oplus kõik omadused järelduvad tema arvutamist defineerivast tõeväärtustabelist:

$x_1 x_2$	$x_1 \oplus x_2$
0 0	$0 \oplus 0 = 0$
0 1	$0 \oplus 1 = 1$
1 0	$1 \oplus 0 = 1$
1 1	$1 \oplus 1 = 0$

"inversiooni imiteerimine"

teisest ja neljandast reast tõeväärtustabelis:

$x_1 x_2$	$x_1 \oplus x_2$
0 0	$0 \oplus 0 = 0$
0 1	$0 \oplus 1 = 1$
1 0	$1 \oplus 0 = 1$
1 1	$1 \oplus 1 = 0$

... saame üldistada:

$$x \oplus 1 = \dots$$

$$x \oplus 1 = \bar{x}$$

Seega konstandi 1 juurdeliitmine muutujale / avaldisele tehtega \oplus *inverteerib* selle avaldise väärtuse vastupidiseks.



NB! x rollis võib olla ka suvaline keerukam avaldis:

$$(\dots) \oplus 1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

konstandi 0 juurdeliitmine tehtega \oplus on ebaefektiivne (ehk "ei mõju"):

Eelneva tõeväärtustabeli esimesest ja kolmandast reast järeldame:

$x_1 x_2$	$x_1 \oplus x_2$
0 0	$0 \oplus 0 = 0$
0 1	$0 \oplus 1 = 1$
1 0	$1 \oplus 0 = 1$
1 1	$1 \oplus 1 = 0$

$$x \oplus 0 = \dots$$

$$x \oplus 0 = x$$

(meenutame: $x \vee 0 = x$)

konstandi 1 korduv juurdeliitmine tehtega \oplus

neljandas reas: $1 \oplus 1 = 0$, seega liites tehtega \oplus konstante 1:

$$\begin{aligned} 1 \oplus 1 \oplus 1 &= \dots \\ 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 &= \dots \\ 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 &= \dots \\ 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 &= \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \oplus 1 \oplus 1 &= 1 \\ 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 &= 0 \\ 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 &= 1 \\ 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 &= 0 \end{aligned}$$

Seega võib paarisarv tk. liidetavaid konstante 1 lihtsalt avaldisest ära jätta, kuna enne selgus et konstandi 0 juurdeliitmine selle tehtega ei muuda avaldise väärtust:

$$x \oplus 0 = x$$

samade väärtuste kokkuliitmine tehtega \oplus

esimesest ja neljandast reast.... :

$x_1 x_2$	$x_1 \oplus x_2$
0 0	$0 \oplus 0 = 0$
0 1	$0 \oplus 1 = 1$
1 0	$1 \oplus 0 = 1$
1 1	$1 \oplus 1 = 0$

.... võib üldistada, et liites loogikamuutujale x tema enda:

$$x \oplus x = \dots$$

.... on tulemuseks alati 0 olenemata x väärtusest:

$$x \oplus x = 0$$

(meenutame: $x \vee x = x$)

kuna $x \oplus x = 0$ siis järeldub, et ka näiteks

$$\begin{aligned} x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 &= 0 \\ x_1 x_2 \bar{x}_3 \oplus x_1 x_2 \bar{x}_3 &= 0 \end{aligned}$$



jne.

Liites tehtega \oplus korduvalt sedasama loogikamuutujat x , saame eelnevast tulenevalt:

$$\begin{aligned} x \oplus x \oplus x &= \dots \\ x \oplus x \oplus x \oplus x &= \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \oplus x \oplus x &= x \\ x \oplus x \oplus x \oplus x &= 0 \\ x \oplus x \oplus x \oplus x \oplus x &= x \end{aligned}$$

$$x \oplus x \oplus x \oplus x \oplus x \oplus x = 0$$

Seega võib paarisarv tk. liidetavaid muutujaid x lihtsalt avaldisest ärajätta, sest nende summa tehtega \oplus on samuti 0

$$x \oplus \bar{x} = ?$$

teisest ja kolmandast reast :

$x_1 x_2$	$x_1 \oplus x_2$
0 0	$0 \oplus 0 = 0$
0 1	$0 \oplus 1 = 1$
1 0	$1 \oplus 0 = 1$
1 1	$1 \oplus 1 = 0$

. . . . võib üldistada, et liites loogikamuutujale x tema *inversiooni* \bar{x} :

$$x \oplus \bar{x} = \dots$$

$$x \oplus \bar{x} = 1$$

(meenutame et ka : $x \vee \bar{x} = 1$)

teisest ja kolmandast reast jäeldub ka :

tehe \oplus ei olene operandide järjekorrast (ehk jäeldub *kommutatiivsus*) :

$$x \oplus y = y \oplus x$$

distributiivsus (sulgude lahtikorrutamine tehte \oplus suhtes)

Loogikaalgebra põhiseoste hulgas leidus *distributiivsusseadus*, mille kohaselt *konjunktsioon* on distributiivne *disjunktsiooni* suhtes:

$$x(y \vee z) = xy \vee xz$$

konjunktsioon on ka tehte \oplus suhtes *distributiivne* :

$$x(y \oplus z) = xy \oplus xz$$

Sellise *distributiivsuse* kehtimise kontrollimiseks võib arvutada eelneva võrduse mõlema poole väärtused muutujate kõigi 8 väärtuskombinatsiooni korral

ehk arvutame võrduse mõlema poole *tõeväärtustabelid* nende võrdlemiseks:

$x y z$	$x(y \oplus z)$	$xy \oplus xz$
0 0 0	0	0
0 0 1	0	0
0 1 0	0	0
0 1 1	0	0
1 0 0	0	0
1 0 1	1	1
1 1 0	1	1
1 1 1	0	0

Tõeväärtustabelite täpne kokkulangevus tõestab nende vastavate avaldiste loogilist samaväärsust. Seega võib **konjunktsioonitehet** kasutades sulge lahtikorrutada mitte ainult \vee suhtes, vaid ka \oplus suhtes.

Võrduse $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$ kehtivust võime kontrollida ka tema mõlemaid pooli teisendades asendusese

$$x_1 \oplus x_2 = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \quad \text{abil.}$$

Teisendame rohelise võrduse \vee a s a k u t poolt :

$$x(y \oplus z) = x(\bar{y}z \vee y\bar{z}) = x\bar{y}z \vee xy\bar{z}$$

Teisendame rohelise võrduse \oplus p a r e m a t poolt :

$$xy \oplus xz = \overline{xyxz} \vee \overline{xy\bar{x}z} = (\bar{x} \vee \bar{y})xz \vee xy(\bar{x} \vee \bar{z}) = \bar{x}xz \vee \bar{y}xz \vee xy\bar{x} \vee xy\bar{z} = x\bar{y}z \vee xy\bar{z}$$

Seega jõudsime võrduse $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$ mõlemat poolt teisendades sama avaldise $x\bar{y}z \vee xy\bar{z}$, mis samuti kinnitab võrduse kehtimist.

pane tähele: eelnevas tõeväärtustabelis olnud 1-de piirkond (kaks rida) annavad just needsamad *elementaarkonjunktsioonid*, mis tekkisid ka nüüd avaldise teisendusel:

$$\dots = x\bar{y}z \vee xy\bar{z}$$

$x y z$	$x(y \oplus z)$	$xy \oplus xz$
0 0 0	0	0
0 0 1	0	0
0 1 0	0	0
0 1 1	0	0
1 0 0	0	0
1 0 1	1	1
1 1 0	1	1
1 1 1	0	0



meenutame: tõeväärtustabeli 1de piirkonnast saab välja kirjutada DNK

! tehte \oplus korral ei esine neeldumist!

! tüüpiline viga:



Kuigi $x \vee xy = x$

... siis \oplus korral sarnane neeldumine ei kehti:

$$x \oplus xy \neq x$$

sega saame kontrollida muutujaväärtuste

$f(xy) = f(11)$ korral eelnevas avaldises:

$$x \oplus xy = 1 \oplus 1 \cdot 1 = 1 \oplus 1 = 0$$

... kuid x oli väärtustatud: $x = 1 \neq 0$

Tehete \oplus ja \vee samaväärsuse tingimus

Tehete \oplus ja \vee omadustest (definiitsioonidest) tuleneb: kui liidetavateks on konstandid:

Kui kokkuliidetavate operandide hulgas on paaritu arv tk. loogikaväärtusi 1, siis võib sellised operandid kokku liita ükskõik kumba tehete: nii tehete \vee kui ka tehete \oplus (mõlemal juhul on tulemus sama)

$$0 \vee 1 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0$$

$$0 \vee 1 \vee 0 \vee 1 \vee 1 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1$$

kui liidetavateks on avaldised (näiteks *elementaarkonjunktsioonid*):

Kui loogikamuutujate x_i väärtustamisel tekib ALATI paaritu arv tk. liidetavaid väärtusi 1 (näiteks ainult üks liidetav), siis võib sellised operandid / elementaarkonjunktsioonid kokku liita ükskõik kumba tehete: nii tehete \vee kui ka tehete \oplus

(mõlemal juhul on tulemus sama)

--- näide: ----- \

lihtsa avaldise $\bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2$ korral võib asendada \vee asemele \oplus :

$$\bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 = \bar{x}_1x_2 \oplus x_1\bar{x}_2$$

samuti ka sellises avaldises :

$$\bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 = \bar{x}_1x_2x_3 \oplus x_1\bar{x}_2x_3$$

... sest ka siin ei õnnestu väärtustada loogikamuutujaid $x_1 x_2 x_3$ konkr.

väärtustega **0** ja **1** nii, et tekkiks liidetavate väärtuste paar : **1** \vee **1**

... misjuhul ei tekki ka liidetavate väärtuste paari : **1** \oplus **1**



NB! oluline pole mitte **liidetavate elementaarkonjunktsioonide kogu**arv DNK-avaldises (mis on siin juhtumisi 2) vaid liidetavate **ÜHTEDE** koguarv (mis tekitab avaldises pärast muutujate väärtustamist konkr. väärtustega)

.... need olid tehte \oplus kõik olulised omadused

--- ülesanne: ----- \

Avaldada DNK-kujul avaldis



$$f(x_1x_2x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$$



on 2 võimalikku DNK-leidmisviisi :

1. kasutades asendusseost $x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}$

$$\begin{aligned}
x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 &= (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = (\bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2) \oplus x_3 = \\
&= (\bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2)x_3 \vee (\bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2)\bar{x}_3 = \\
&= \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 = \\
&= (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 = \\
&= (x_1\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_2)x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 = \\
&= (\bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_1x_2)x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 = \\
&= \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3
\end{aligned}$$

sai me **täieliku DNK** (TDNK) kuna igas DNK liikmes leiduvad siin selle funktsiooni $f(x_1x_2x_3)$ **kõik** muutujad

püüame seda DNK-d edasi lihtsustada :

meenutame **4 võtet**, millega üldse saab DNK-d edasi lihtsustada :

neeldumine: $x \vee x y$ pole võimalik TDNK korral

neeldumine: $x \vee \bar{x} y$ pole võimalik TDNK korral

ühine tegur sulgude ette : $z(x \vee \bar{x} y)$ pole võimalik TDNK korral



? ... MIKS pole need 3 teisendusvõtet kasutatavad TDNK peal ?
nendest neljast ainsana osutub võimalikuks TDNK jaoks :

ühine tegur sulgude ette : $z(x \vee \bar{x})$ ainult see on võimalik TDNK korral

$$\dots = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$$